

Equations et inéquations

1 Résolution d'équations

Méthode. Pour résoudre une équation, on écrit des équations plus simples qui lui sont équivalentes, jusqu'à obtenir une équation dont la solution est évidente.

Exemple 1. L'équation $4x - 6 = 9$ est équivalente aux équations suivantes :

$$4x - 6 + 6 = 9 + 6$$

on additionne le même nombre dans chaque membre

$$4x = 15$$

l'équation obtenue est plus simple

$$\frac{4x}{4} = \frac{15}{4}$$

on divise chaque membre par le même nombre

$$x = 3,75$$

la solution est évidente : 3,75.

Exemple 2. L'équation $4x - 6 = 9x + 7$ est équivalente aux suivantes :

$$4x - 6 - 4x = 9x + 7 - 4x$$

on soustrait la même expression dans chaque membre

$$-6 = 5x + 7$$

l'équation obtenue est plus simple

$$-6 - 7 = 5x + 7 - 7$$

on soustrait le même nombre dans chaque membre

$$-13 = 5x$$

l'équation obtenue est encore plus simple

$$\frac{-13}{5} = \frac{5x}{5}$$

on divise chaque membre par le même nombre

$$-2,6 = x$$

la solution est évidente : $-2,6$.

2 Equation produit nul

Théorème. Un produit est égal à zéro si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est égal à zéro.

Application. Résoudre $(2x + 5)(4x - 3) = 0$

$$\begin{aligned}
(2x+5)(4x-3) = 0 &\iff 2x+5=0 \quad \text{ou} \quad 4x-3=0 \\
&\iff 2x+5-5 = -5 \quad \text{ou} \quad 4x-3+3 = 3 \\
&\iff 2x = -5 \quad \text{ou} \quad 4x = 3 \\
&\iff \frac{2x}{2} = \frac{-5}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{4x}{4} = \frac{3}{4} \\
&\iff x = -2,5 \quad \text{ou} \quad x = 0,75
\end{aligned}$$

Les solutions sont $-2,5$ et $0,75$.

3 Inégalités équivalentes

Les théorèmes suivants peuvent se démontrer à l'aide de l'équivalence : $a \leq b \iff a - b \leq 0$

Théorème 1. Quels que soient les nombres a , b et c les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$a \leq b$$

$$a + c \leq b + c \quad a - c \leq b - c$$

Théorème 2. Quels que soient les nombres a , b et le nombre **positif** c les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$a \leq b$$

$$a \times c \leq b \times c \quad a/c \leq b/c$$

$$a \times (-c) \geq b \times (-c) \quad a/(-c) \geq b/(-c)$$

4 Résolution d'inéquation

Méthode. Pour résoudre une inéquation, on écrit des inéquations plus simples qui lui sont équivalentes, jusqu'à obtenir une inéquation dont les solutions sont évidentes.

Exemple. L'inéquation $\frac{4x + 5}{-3} \leq 6$ est équivalente aux inéquations suivantes :

$$\frac{4x + 5}{-3} \times (-3) \geq 6 \times (-3)$$

en multipliant chaque membre par (-3) on change le sens de l'inégalité

$$4x + 5 \geq -18$$

l'inéquation obtenue est plus simple

$$4x + 5 - 5 \geq -18 - 5$$

on soustrait 5 dans chaque membre (le sens ne change pas)

$$4x \geq -23$$

l'inéquation obtenue est plus simple

$$\frac{4x}{4} \geq \frac{-23}{4}$$

on divise chaque membre par 4 (le sens ne change pas)

$$x \geq -5,75$$