Fonctions linéaires - fonctions affines

1 Fonction linéaire

Définition. Une fonction **linéaire** est une fonction pour laquelle les nombres et leurs images sont proportionnels.

$$f\,:\,x\longmapsto ax \qquad a \text{ est un coefficient de proportionnalité}$$

Exemples. $f\,:\,x\longmapsto -0,5x$ $\qquad$ $g\,:\,x\longmapsto \frac{2}{3}x$

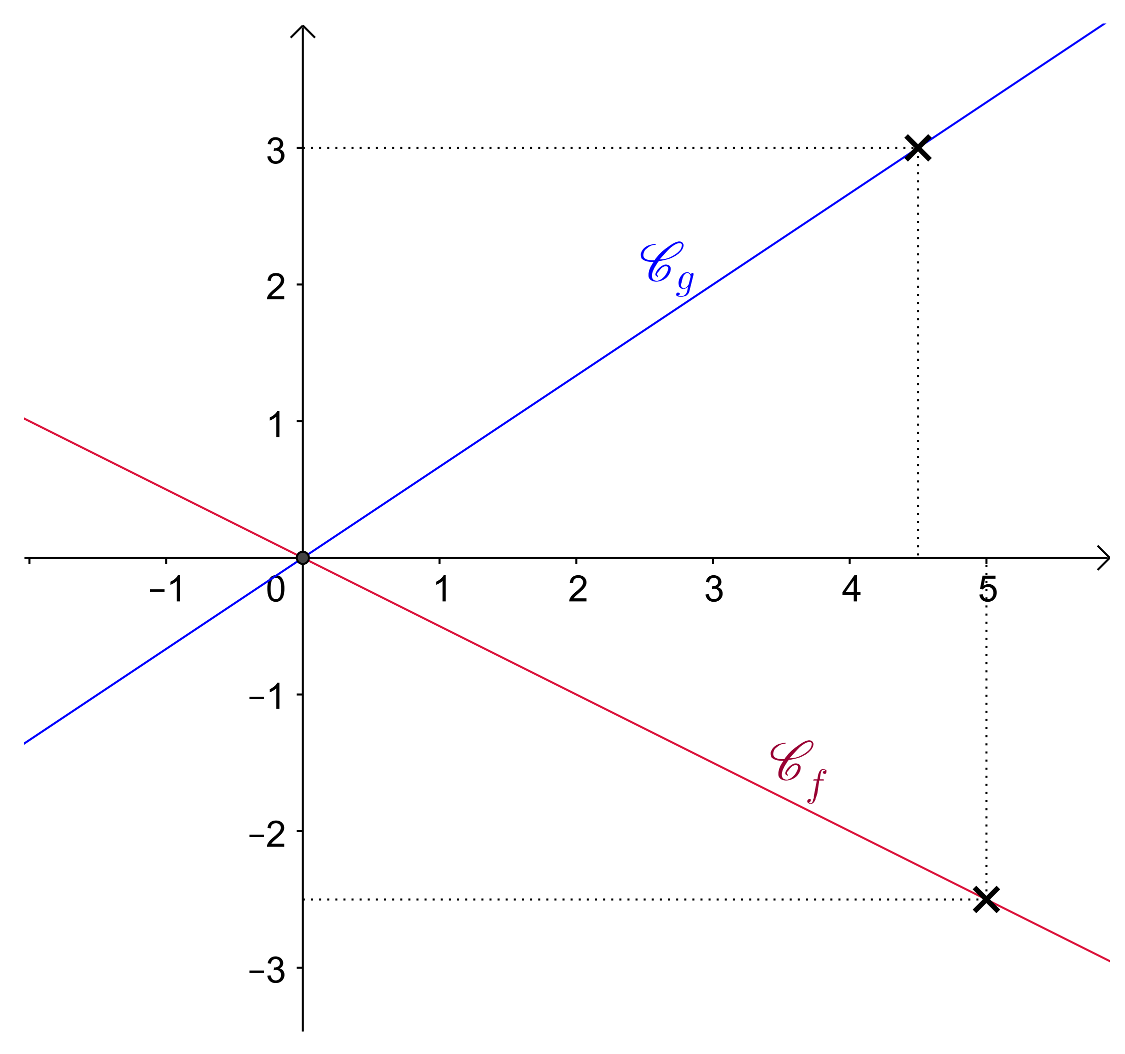
x	2,5	5	7,5
$f(x)$	-1,25	-2,5	-3,75

$\boxed{\times(-0,5)}$

x	1,5	3	4,5
$g(x)$	1	2	3

$\boxed{\times 2/3}$

Théorème. La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.



Vocabulaire. Soit (d) la représentation graphique de la fonction linéaire $f\,:\,x\longmapsto ax$. On dit que a est le **coefficient directeur** de la droite (d).

Exemple. La droite $\mathscr{C}_f$ qui représente $f\,:\,x\longmapsto -0,5x$ a pour coefficient directeur $-0,5$.

2 Fonction affine

Définition. Une **fonction affine** est une fonction qui a tout nombre x associe le nombre $ax+b$.

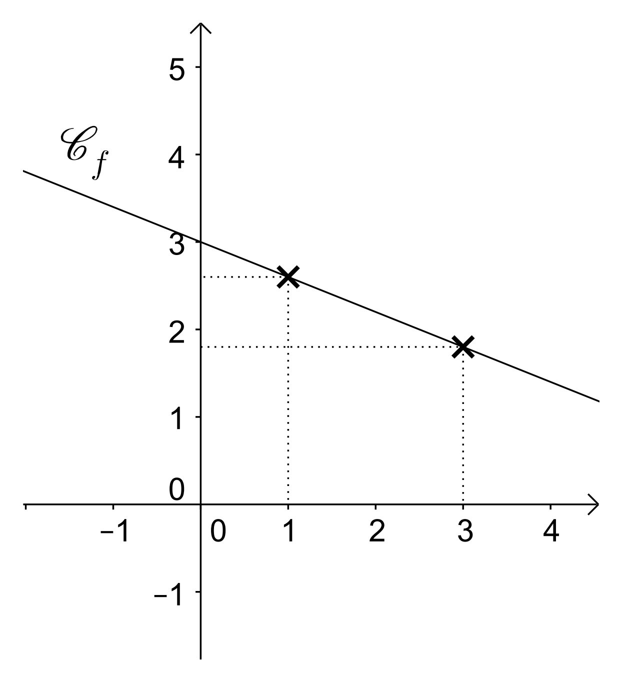
$$f\,:\,x\longmapsto ax+b \qquad a \text{ et } b \text{ déterminent } f$$

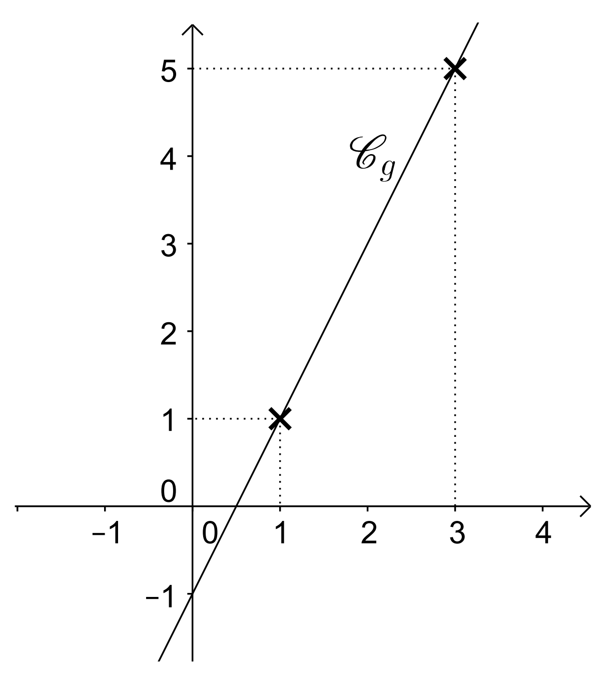
Exemples. $f\,:\,x\longmapsto -0,4x+3$ $\qquad$ $g\,:\,x\longmapsto 2x-1$

x	0	1	2	3
$f(x)$	3	2,6	2,2	1,8

x	-1	0	1	3
$g(x)$	-3	-1	1	5

Théorème. La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.





Vocabulaire. Soit (d) la représentation graphique de la fonction affine $f\,:\,x\longmapsto ax+b$.
a est le **coefficient directeur**, b est l'**ordonnée à l'origine** de la droite (d).

Exemple. La droite $\mathscr{C}_f$ qui représente $f\,:\,x\longmapsto -0,4x+3$ a pour ordonnée à l'origine 3.

3 Accroissement

Formule. soit $f\,:\,x\longmapsto ax+b$ une fonction affine. Quels que soient les nombres x_1 et x_2 (avec $x_1\neq x_2$) on a :

$$\boxed{a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$

Exemples. Soit $f\,:\,x\longmapsto -2x+3$ on a :

$f(5)=-2\cdot 5+3=-10+3=-7$
$f(1)=-2\cdot 1+3=-2+3=1$

$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{-7-1}{4}=\frac{-8}{4}=\boxed{-2}$$

$f(4)=-2\cdot 4+3=-8+3=-5$
$f(2)=-2\cdot 2+3=-4+3=-1$

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{-5-(-1)}{2}=\frac{-5+1}{-4}=\frac{-4}{2}=\boxed{-2}$$

Preuve de la formule.

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=(ax_1+b)-(ax_2+b)\\&=ax_1+b-ax_2-b\\&=ax_1-ax_2+\cancel{b}-\cancel{b}\\&=a(x_1-x_2)\end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{a(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=a$$