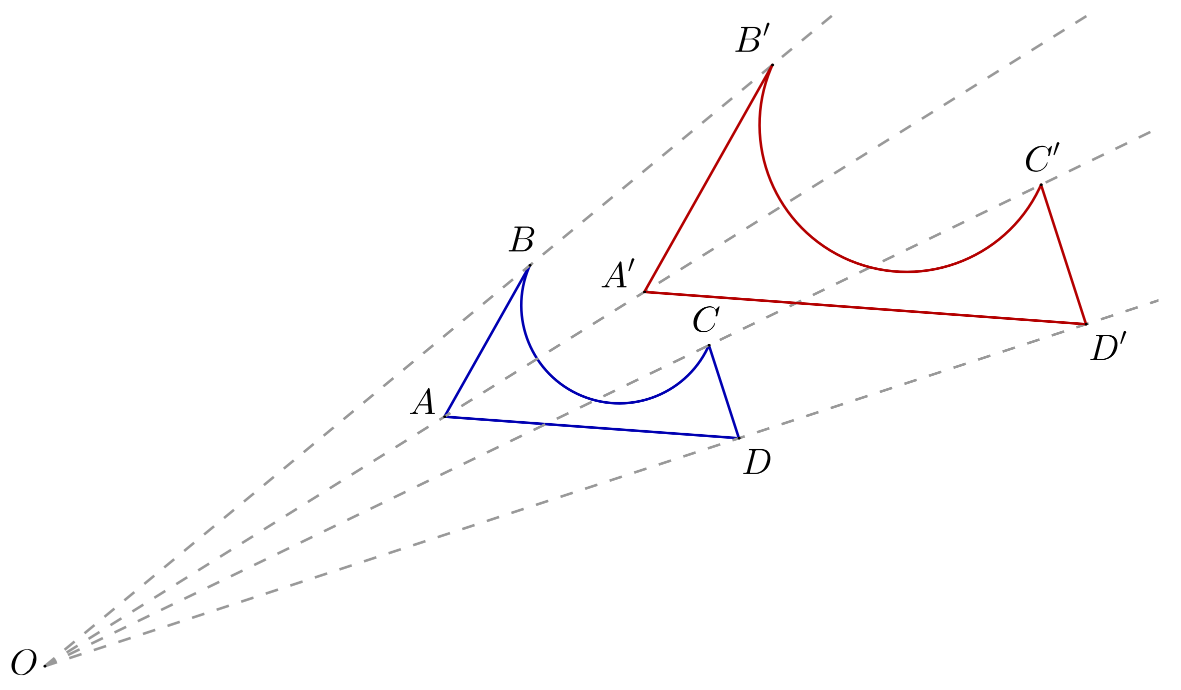
Les homothéties

1 Agrandissement - réduction

Transformer une figure (F) par une **homothétie,** c'est agrandir (F) ou la réduire.

Exemple. La figure ABCD a pour image A'B'C'D' par une homothétie.



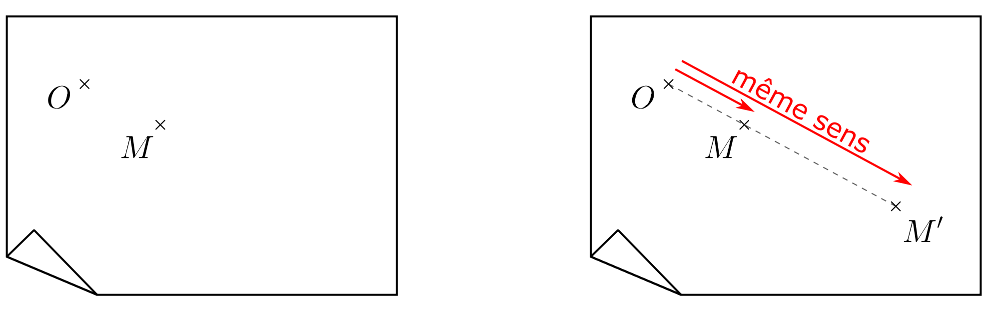
Les dimensions de ABCD sont multipliées par 1,5 et on a :

$OA' = 1,5 \cdot OA \quad ; \quad OB' = 1,5 \cdot OB \quad ; \quad OC' = 1,5 \cdot OC \quad ; \quad OD' = 1,5 \cdot OD$

O est le **centre** de l'homothétie, 1,5 est le **rapport** de l'homothétie.

2 Rapport positif

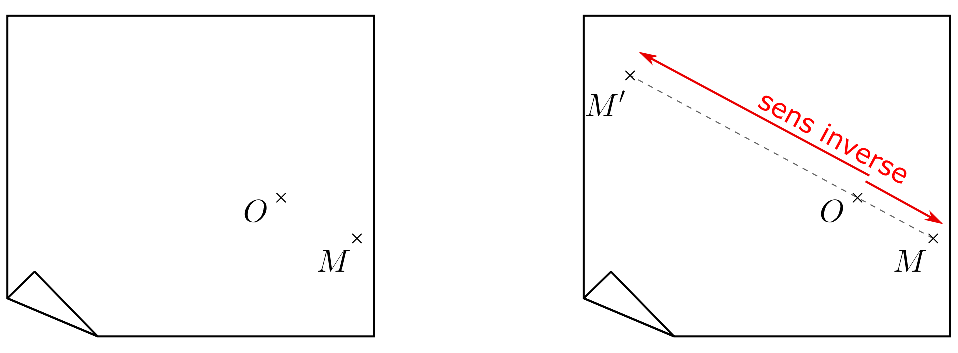
Pour construire l'image d'un point M par une homothétie de centre O et de rapport k positif,
(1) on trace la demi-droite [OM)
(2) on prend l'écartement $k \cdot OM$ au compas
(3) on place M' à la distance $k \cdot OM$ du point O.



Remarque. Si $k > 1$ c'est un agrandissement, si $0 < k < 1$ c'est une réduction.

3 Rapport négatif

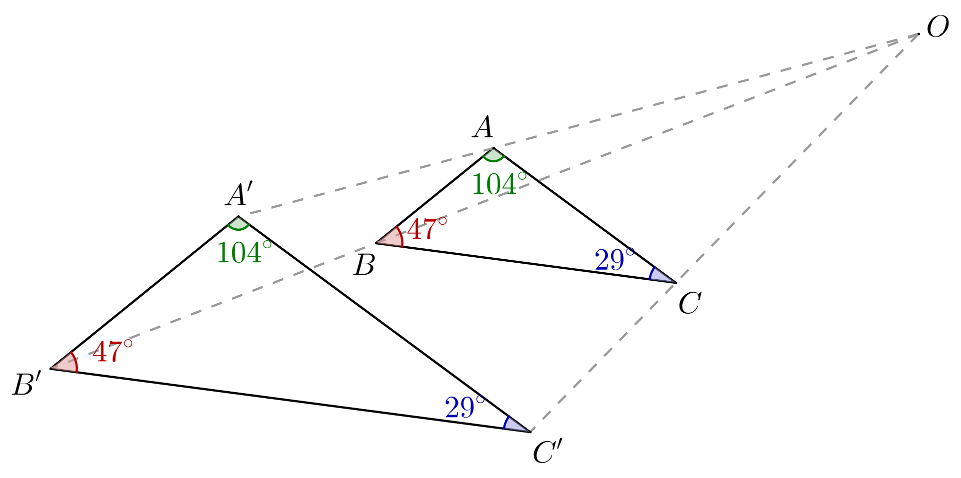
Pour construire l'image d'un point M par une homothétie de centre O et de rapport k négatif,
(1) on trace la demi-droite [MO)
(2) on prend l'écartement $|k| \cdot OM$ au compas
(3) on place M' à la distance $|k| \cdot OM$ du point O.



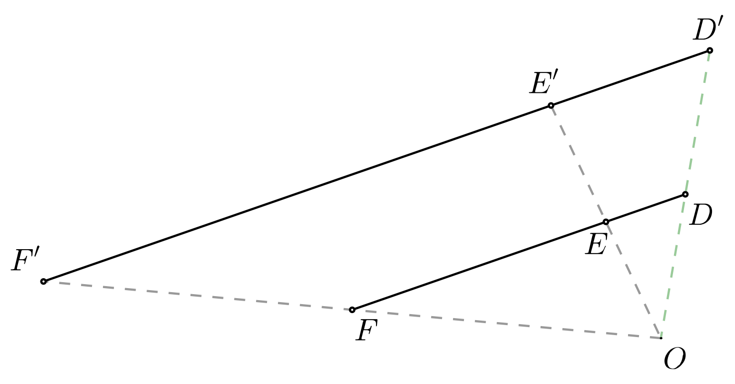
Remarque. Si $-1 < k < 0$ c'est une réduction, si $k < -1$ c'est un agrandissement.

4 Propriétés.

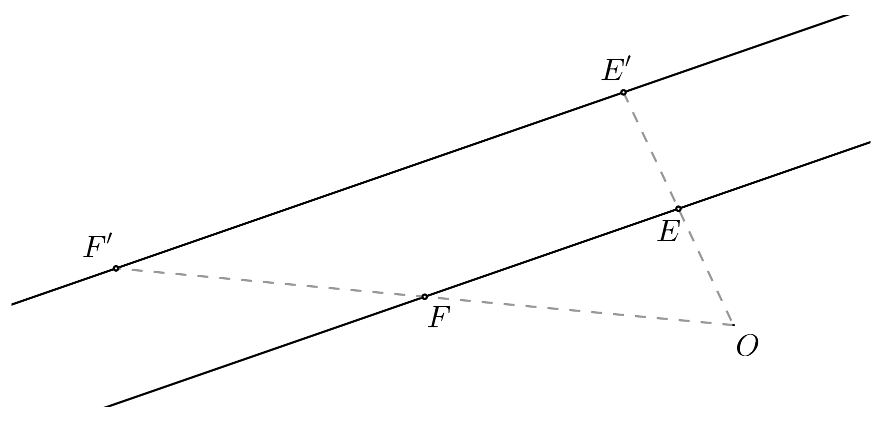
(1) Une homothétie conserve les angles.



(2) Une homothétie transforme trois points alignés en trois points alignés.



(3) Une homothétie transforme une droite (d) en une droite parallèle à (d).



(4) Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$ et les aires par k^2.